

Аналоговое оптическое моделирование геометрии пространства анти-де-Ситтера и подавление фазового шума в магнитооптической ячейке

С. Г. Круковский

Мозырь, Беларусь

E-mail: nc.sergeynat@gmail.com

PACS: 04.20.-q, 42.25.-p, 78.20.Ls, 11.25.Tq

Ключевые слова: аналоговая гравитация, пространство анти-де-Ситтера, эффект Фарадея, голографический словарь, фазовый шум.

Аннотация. Предложен метод аналогового моделирования геометрии пятимерного пространства анти-де-Ситтера (AdS_5) в магнитооптической ячейке с монокристаллом тербий-галлиевого граната (TGG) в продольном магнитном поле. Показано, что формальное совпадение уравнения эйконала для фотонной моды в гиротропной среде с уравнением геодезических в эффективной оптической метрике позволяет интерпретировать распространение излучения как движение в искривлённом пятимерном подпространстве. Из решения краевой задачи Клейна — Гордона для фундаментальной Калуца — Клейновской моды в плоском компактном интервале при условиях Неймана — Дирихле выведен тригонометрический профиль временной компоненты эффективной метрики. Калибровочный эмерджентный параметр $L_{AdS} = 170$ мкм связан с измеряемым углом Фарадея через голографический словарь AdS/CFT . Предсказано, что в точке пространственно-геометрического баланса параметров симулятора ($B^* = 2,0$ Тл) возникает немонотонный асимметричный провал спектральной плотности фазового шума, описываемый нелинейным уравнением связи. Эффект принципиально отличен от классического поворота Фарадея и не реализуется в стандартных оптических изоляторах.

1. Введение

Аналоговая гравитация — направление, в котором уравнения движения в искривлённом пространстве-времени воспроизводятся в лабораторных физических

системах — прошла путь от концепции Унру [1] до экспериментально верифицированных моделей в гидродинамике, оптике и физике конденсированного состояния (обзоры: [2, 3]). В оптическом контексте фундаментальная идея состоит в том, что уравнение эйконала для света в среде с пространственно-неоднородным диэлектрическим тензором формально совпадает с уравнением геодезических в эффективной метрике искривлённого пространства-времени. Это позволяет ставить эксперименты по «моделированию» гравитационных эффектов — горизонтов, варп-факторов, топологических переходов — в управляемых лабораторных условиях.

Пространство анти-де-Ситтера AdS_5 занимает центральное место в голографическом соответствии AdS/CFT [4] и в бранных сценариях Рандалл — Сундрума [5, 6], где четырёхмерная Вселенная локализована на бране, погружённой в пятимерный балк с отрицательной кривизной. Экспериментальное моделирование свойств AdS_5 в оптической системе — задача, представляющая интерес как для проверки концептуальных идей многомерной гравитации, так и для поиска новых физических эффектов в среде, которые не предсказываются стандартной магнитооптикой.

В настоящей работе предложен оптический симулятор, в котором когерентное лазерное излучение с длиной волны $\lambda = 1064$ нм проходит через монокристалл TGG толщиной $d = 17,26$ мм в продольном магнитном поле $B = 2,0$ Тл. Показано, что в точке калибровочного баланса параметров система воспроизводит ключевое топологическое свойство AdS_5 — формирование узла стоячей волны на аналоговом горизонте, — а также предсказывает новый физический эффект: немонотонный асимметричный провал спектральной плотности фазового шума.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 изложено отображение эйконального уравнения на уравнение геодезических в эффективной оптической метрике. Раздел 3 содержит калибровку параметров симулятора. В разделе 4 представлены результаты: профиль эффективной метрики (4.1), сравнение с классическим эффектом Фарадея (4.2) и предсказание асимметричного провала фазового шума (4.3). Раздел 5 очерчивает границы применимости модели. В Приложении А дано обоснование двухуровневого приближения и калибровочного статуса голографического параметра L_{AdS} .

2. Отображение эйконального уравнения на уравнение геодезических

2.1. Диэлектрический тензор гиротропной среды

Рассмотрим распространение когерентного лазерного излучения с длиной волны $\lambda = 1064$ нм в монокристалле тербий-галлиевого граната TGG (пространственная группа $Ia3d$), помещённом в продольное магнитное поле B , направленное вдоль оси распространения z . В приближении слабой гиротропии материальное уравнение связи для гиротропной среды имеет вид:

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j + i \varepsilon_{ijm} g_m E_j, \quad (1)$$

где ε_{ij} — симметричная часть тензора диэлектрической проницаемости, g_m — компоненты гирационного вектора, пропорциональные индукции магнитного поля: $g = V \cdot B$, где V — постоянная Верде. Для монокристалла TGG в диапазоне температур 293–303 К: $n_0 = 1,954$, $V = 36$ рад/(Тл·м).

Угол поворота плоскости поляризации (угол Фарадея) определяется интегралом:

$$\Delta\varphi = V \cdot B \cdot d. \quad (2)$$

При $B = 2,0$ Тл и $d = 17,26$ мм:

$$\Delta\varphi = 36 \times 2,0 \times 0,01726 = 1,2427 \text{ рад} = 71,2^\circ. \quad (3)$$

2.2. Уравнение эйконала и эффективная оптическая метрика

Уравнение эйконала для фазы фотонной моды в среде с тензором $\varepsilon_{ij}(B)$ имеет вид:

$$(\partial_i S)(\partial_j S) \eta^{ij} = n^2(x), \quad (4)$$

где S — эйконал, η^{ij} — метрика Минковского, $n(x)$ — эффективный показатель преломления, зависящий от магнитного поля через $\varepsilon_{ij}(B)$.

Формальное совпадение уравнения (4) с уравнением геодезических $d^2x^\mu/d\tau^2 + \Gamma^\mu_{\nu\rho} (dx^\nu/d\tau)(dx^\rho/d\tau) = 0$ в эффективной метрике

$$ds^2 = g^{\text{eff}}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (5)$$

позволяет интерпретировать распространение фотонной моды в гиротропной среде как движение в искривлённом пространстве с эффективной метрикой $g^{\text{eff}}_{\mu\nu}$, компоненты которой определяются диэлектрическим тензором среды. Данное соответствие — стандартный методологический приём аналоговой гравитации [2, 3] — не утверждает физической эквивалентности оптической среды и гравитационного

поля, но позволяет использовать геометрический язык для описания волновой кинематики в среде.

Для пятимерного обобщения вводится компактное подпространственное измерение — аналог Калуца — Клейновской [7] петли длиной L_{5D} , параметризующей эффективное пятимерное подпространство. Временная компонента эффективной метрики $g^{\text{eff}}_{5D_{00}}$ связывает геометрические параметры симулятора с измеряемой оптической величиной — углом Фарадея $\Delta\varphi$.

3. Калибровка параметров симулятора

3.1. Геометрические параметры

Трёхмерный оптический путь R_{3D} определяется показателем преломления и физической толщиной кристалла:

$$R_{3D} = n_o \cdot d = 1,954 \times 17,26 \text{ мм} = 33,73 \text{ мм}. \quad (6)$$

Подпространственная петля L_{5D} связана с углом Фарадея через масштабный проектор α :

$$L_{5D} = \alpha \cdot \Delta\varphi, \quad (7)$$

где α вводится на основе UV-IR соотношения голографического словаря AdS/CFT [4]:

$$\alpha = L^2_{AdS} / \lambda. \quad (8)$$

3.2. Условие баланса

Калибровочный баланс симулятора определяется условием:

$$R_{3D} = L_{5D}. \quad (9)$$

При $B = B^* = 2,0$ Тл угол Фарадея $\Delta\varphi = 1,2427$ рад (формула (3)), и условие (9) даёт:

$$\alpha = R_{3D} / \Delta\varphi = 33,73 / 1,2427 = 27,14 \text{ мм/рад}. \quad (10)$$

Из (8) при $\lambda = 1,064$ мкм:

$$L_{AdS} = \sqrt{(\alpha \cdot \lambda)} = \sqrt{(27,14 \times 1,064 \times 10^{-3})} = 0,170 \text{ мм} = 170 \text{ мкм}. \quad (11)$$

Параметр $L_{AdS} = 170$ мкм удовлетворяет критерию разделения масштабов геометрической оптики:

$$\lambda \ll L_{AdS} \ll d, \quad (12)$$

а именно: $1,064 \text{ мкм} \ll 170 \text{ мкм} \ll 17\,260 \text{ мкм}$.

4. Результаты и обсуждение

4.1. Профиль эффективной метрики

В Приложении А показано, что уравнение Клейна — Гордона для фундаментальной Калуца — Клейновской моды в плоском компактном интервале $y \in [0, L_{5D}]$ при краевых условиях Неймана ($\chi'(0) = 0$) и Дирихле ($\chi(L_{5D}) = 0$) имеет решение:

$$\chi_o(y) = \cos(\pi y / (2L_{5D})). \quad (13)$$

Тригонометрический профиль временной компоненты эффективной метрики определяется как квадрат амплитуды волновой функции:

$$g^{eff,5D}_{00} = |\chi_o(R_{3D})|^2 = \cos^2(\pi R_{3D} / (2L_{5D})). \quad (14)$$

В точке баланса $R_{3D} = L_{5D}$:

$$g^{eff,5D}_{00} = \cos^2(\pi/2) = 0. \quad (15)$$

Обращение метрической компоненты в нуль соответствует формированию интерференционного узла стоячей волны на аналоговом горизонте — точке, в которой эффективная метрика вырождается. Это топологическое свойство робастно и не зависит от выбора приближения (см. Приложение А.1).

4.2. Сравнение с классическим эффектом Фарадея

Стандартный оптический изолятор Фарадея характеризуется монотонной линейной зависимостью угла поворота плоскости поляризации от магнитного поля (формула (2)) во всём рабочем диапазоне. Техническая задача серийного изолятора — однонаправленное пропускание излучения и блокировка обратного отражения.

Заявляемый симулятор решает принципиально иную задачу. В точке калибровочного баланса ($B^* = 2,0 \text{ Тл}$) система переходит в режим параметрического интерференционного резонатора: эффективная метрическая компонента $g^{eff,5D}_{00}$ обращается в нуль, что соответствует формированию интерференционного узла стоячей волны. Этот эффект не имеет аналога в стандартной магнитооптике, где поворот плоскости поляризации не сопровождается немонотонными изменениями спектральных характеристик излучения.

4.3. Асимметричный провал фазового шума

Обращение эффективной метрической компоненты в нуль в точке баланса интерпретируется как формирование аналогового горизонта — области, в которой амплитуда фазовых флуктуаций среды подавляется за счёт деструктивной интерференции высших волновых мод резонатора. Модель предсказывает, что спектральная плотность фазового шума $\Phi(B)$ в окрестности точки баланса описывается нелинейным асимметричным уравнением связи:

$$\Phi_{measured}(B) = \Phi_0 \cdot [1 - \eta \cdot \sin^2(\pi B^* / (2B))], \quad (16)$$

где Φ_0 — максимальный классический фон шума, η — феноменологический коэффициент эффективности связи, определяемый по глубине провала шума при калибровке конкретного образца (ожидаемое значение порядка 0,8).

При $B = B^* = 2,0$ Тл аргумент синуса обращается в $\pi/2$, $\sin^2(\pi/2) = 1$, и:

$$\Phi(B^*) = \Phi_0 \cdot (1 - \eta) = 0,2 \cdot \Phi_0, \quad (17)$$

что соответствует подавлению шума на 80%.

Сканирование магнитного поля в сторону уменьшения (до $B = 1,0$ Тл) даёт:

$$\Phi(1,0) = \Phi_0 \cdot [1 - \eta \cdot \sin^2(\pi)] = \Phi_0 \cdot (1 - 0) = \Phi_0, \quad (18)$$

т. е. возврат к 100% базового фона.

Сканирование в сторону увеличения (до $B = 3,0$ Тл):

$$\Phi(3,0) = \Phi_0 \cdot [1 - \eta \cdot \sin^2(\pi/3)] = \Phi_0 \cdot [1 - 0,8 \cdot (3/4)] = \Phi_0 \cdot 0,4, \quad (19)$$

т. е. 40% от базового фона.

Расчётные значения параметров симулятора при различных значениях магнитного поля приведены в таблице.

В, Тл	$\Delta\phi$, °	R_3D, мм	L_5D, мм	$g^{00}_{eff,5D}$	Φ/Φ_0 (расч.)	Состояние
1,0	35,6	33,73	16,86	1,00	1,00	Фон
2,0	71,2	33,73	33,73	0	0,20	Провал
3,0	106,8	33,73	50,59	0,25	0,40	Частичное подавление

Таблица. Параметры симулятора при различных значениях магнитного поля.

Ключевое свойство предсказания — асимметрия: при равном отклонении от точки баланса ($\pm 1,0$ Тл) уровень шума различается (100% при 1,0 Тл против 40% при 3,0 Тл). Эта асимметрия — прямое следствие нелинейности синуса в формуле (16) и

принципиально отличает предсказанный эффект от симметричных резонансных провалов, характерных для классических интерференционных фильтров.

Наличие немонотонного асимметричного провала, регистрируемого спектроанализатором на выходе фотодетектора, представляет собой объективно измеряемую физическую величину, принципиально нереализуемую в стандартных оптических изоляторах Фарадея.

5. Границы применимости

Предложенная модель носит кинематический характер и опирается на формальное совпадение эйконального уравнения с уравнением геодезических. Авторы не утверждают полной динамической эквивалентности оптической системы и гравитационного поля. В частности:

(i) Эффективная метрика $g^{\text{eff}}_{\mu\nu}$ воспроизводит геометрические аспекты распространения фотонных мод, но не описывает тензор кривизны Римана и уравнения Эйнштейна для полной динамики пространства-времени.

(ii) Плоский компактный интервал, использованный для вывода тригонометрического профиля (14), является эффективной феноменологической моделью КК-спектра, мотивированной асимптотикой AdS_5 вблизи браны, а не точным решением в полном балке (см. Приложение А.1).

(iii) Параметр $L_{\text{AdS}} = 170$ мкм — калибровочный эмерджентный параметр, определяемый обратным ходом из условий эксперимента, а не априорно предсказанная константа модели (см. Приложение А.2).

(iv) Коэффициент эффективности связи η — феноменологический параметр; модель предсказывает форму кривой $\Phi(B)$, но не её абсолютную амплитуду.

(v) Уравнение (16) — полуфеноменологическое соотношение; строгий вывод зависимости $\Phi \propto (1 - g_{00})$ из микроскопической теории флуктуаций в гиротропной среде выходит за рамки настоящей работы.

6. Заключение

Предложен метод аналогового моделирования геометрии пространства AdS_5 в магнитооптической ячейке с монокристаллом TGG. Из решения краевой задачи Клейна — Гордона для фундаментальной КК-моды выведен тригонометрический профиль временной компоненты эффективной метрики, обращающийся в нуль в

точке калибровочного баланса. Масштабный проектор α связан с голографическим словарём AdS/CFT; калибровочный параметр $L_{\text{AdS}} = 170$ мкм удовлетворяет критерию разделения масштабов. Предсказан немонотонный асимметричный провал спектральной плотности фазового шума (до 80% при $B = 2,0$ Тл), качественно отличный от монотонного поведения стандартных оптических изоляторов Фарадея. Экспериментальная верификация предсказанного провала планируется на стенде с InGaAs-фотодетектором и RF-спектроанализатором и составляет предмет будущих исследований.

Приложение А. Обоснование профиля эффективной метрики в двухуровневом приближении аналоговой гравитации

Для исключения методологических противоречий при проецировании уравнений поля на эффективную брану оптического симулятора, геометрия пятимерного подпространства рассматривается в рамках двухуровневого феноменологического приближения, разделяющего локальный Калуца — Клейновский волновой профиль и глобальный голографический масштабный контекст.

А.1. Локально-плоский резонатор как эффективная топологическая модель КК-спектра

Рассмотрим полную пятимерную метрику балка пространства анти-де-Ситтера (AdS_5), ограниченного УФ-браной, в координатах собственного расстояния w :

$$ds^2 = e^{(-2k|w|)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dw^2, \quad (\text{A.1})$$

где $k = 1/L_{\text{AdS}}$ — масштаб кривизны.

Уравнение Клейна — Гордона — Фока для безмассовой моды скалярного поля $\Phi(x^\mu, w) = \psi(x^\mu) \chi(w)$ после разделения переменных порождает одномерное уравнение волнового профиля:

$$\chi''(w) + 4k \chi'(w) + k^2 5D e^{(2k|w|)} \chi(w) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Наличие члена первого порядка $4k \chi'(w)$, индуцированного символами Кристоффеля искривлённого балка, формирует эффективный локализуемый потенциал (volcano potential), который принципиально не зануляется на границе

браны ($w \rightarrow 0$). Численная оценка параметров заявляемого симулятора ($L_{AdS} = 170$ мкм, $k_{5D} = \pi/(2L_{5D})$ при отношении масштабов $L_{5D} / L_{AdS} \approx 198$) показывает, что метрический градиентный член превалирует над волновым числом осцилляции ($4k / k_{5D} \approx 504$), что исключает возможность прямой количественной аппроксимации точного Бесселева профиля плоской тригонометрической функцией в полном балке.

Ввиду указанного масштабного разрыва, близость конформного варп-фактора к единице вблизи УФ-границы используется исключительно как мотивация для введения плоского компактного интервала $y \in [0, L_{5D}]$ в качестве эффективной феноменологической модели для КК-спектра, локализованного на бране:

$$\chi''(y) + k_{5D}^2 \chi(y) = 0. \quad (A.3)$$

Данное приближение не претендует на точное количественное воспроизведение волнового профиля в полном объёме балка AdS₅. Однако оно корректно передаёт ключевое топологическое свойство системы — наличие узла стоячей волны при граничном условии Дирихле на аналоговом горизонте. Положение интерференционного минимума в точке $y = L_{5D}$ является робастным топологическим инвариантом, не зависящим от выбора аппроксимации: как плоское решение (A.3), так и точное AdS-решение волнового уравнения (A.2) тождественно обращаются в нуль на границе с граничным условием Дирихле. Из решения краевой задачи для низшей КК-моды интервала при условиях Неймана ($\chi'(0) = 0$) и Дирихле ($\chi(L_{5D}) = 0$) выводится искомый тригонометрический профиль временного коэффициента эффективной метрики симулятора:

$$g^{eff,5D}_{00} = |\chi_0(R_{3D})|^2 = \cos^2(\pi R_{3D} / (2L_{5D})). \quad (A.4)$$

A.2. Калибровочный статус голографического параметра L_{AdS} и структурная гомология уравнений

Масштабный проектор α , связывающий измеряемый в лаборатории угол Фарадея $\Delta\phi$ с геометрическим параметром петли L_{5D} в параметрическом пространстве симулятора ($L_{5D} = \alpha \cdot \Delta\phi$), вводится на основе UV-IR соотношения голографического словаря AdS/CFT [4]:

$$\alpha = L^2_{AdS} / \lambda. \quad (A.5)$$

Нарушение пространственной чётности в гиротропной магнетоактивной среде кристалла TGG, приводящее к циркулярному двойному лучепреломлению, математически аналогично нарушению чётности электромагнитного поля за счёт топологического члена Черна — Саймонса, индуцирующего киральные токи на границе пространства анти-де-Ситтера AdS_5 . Данная формально-структурная гомотопия уравнений Максвелла в гиротропной среде и полевых уравнений Черна — Саймонса [8] выступает естественной физико-математической мотивацией для привлечения голографического словаря AdS/CFT в качестве адекватного геометрического языка для описания эволюции фазы фотонной моды в симуляторе.

При этом авторы эксплицитно указывают, что радиус кривизны L_{AdS} не является априорно предсказанной константой модели и не выводится в настоящей работе из микроскопической теории спин-орбитального взаимодействия или зеемановского расщепления ионов Tb^{3+} . Величина $L_{AdS} = 170$ мкм представляет собой калибровочный эмерджентный параметр связи волновой среды, определяемый обратным ходом из граничных условий макроскопического эксперимента в точке формирования аналогового горизонта.

Рассматриваемый масштаб $L_{AdS} = 170$ мкм носит сугубо феноменологический характер, а его физическая состоятельность подтверждается тем, что он строго удовлетворяет фундаментальному критерию разделения масштабов геометрической оптики: $\lambda \ll L_{AdS} \ll d$ ($1,064$ мкм $\ll 170$ мкм $\ll 17\,260$ мкм). Построение полной динамической теории, связывающей материальный тензор диэлектрической проницаемости $\epsilon_{ij}(B)$ парамагнитного монокристалла с микроскопической генерацией многомерных эффективных потенциалов, выходит за рамки предложенного кинематического аналога и составляет предмет будущих исследований.

Список литературы

- [1] W. G. Unruh, «Experimental black-hole evaporation?», Phys. Rev. Lett. 46, 1351 (1981).
- [2] C. Barceló, S. Liberati, M. Visser, «Analogue gravity», Living Rev. Relativity 8, 12 (2005).
- [3] U. Leonhardt, P. Philbin, «Geometry and Light: The Science of Invisibility», Dover (2010).
- [4] J. Maldacena, «The large N limit of superconformal field theories and supergravity», Adv. Theor. Math. Phys. 2, 231 (1998).

- [5] L. Randall, R. Sundrum, «An alternative to compactification», Phys. Rev. Lett. 83, 4690 (1999).
- [6] L. Randall, R. Sundrum, «Large mass hierarchy from a small extra dimension», Phys. Rev. Lett. 83, 3370 (1999).
- [7] T. Kaluza, «On the problem of unity in physics», Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 966 (1921).
- [8] F. Wilczek, «Two applications of axion electrodynamics», Phys. Rev. Lett. 58, 1799 (1987).
- [9] G. D. Nugent, «Magneto-optical properties of terbium gallium garnet», Appl. Opt. 45, 593 (2006).

Финансирование

Работа выполнена без привлечения внешнего финансирования.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.