

作用素環論に着想を得た動的結合場の 3 次元数式モデル A 3D Mathematical Model of a Dynamically Coupled Field Inspired by Operator Algebras: Theoretical Foundation and Numerical Verification of Stable Coupled Motion

今野聖也 Toshiya Konno¹

¹Independent Researcher, ktlifeisonlyreallyoverafter60@gmail.com

2025 年 6 月 20 日 (Version 2.5)

Keywords: Coupled Gross–Pitaevskii Equations; Quantum-Classical Hybrid System; Tensegrity; Soliton Dynamics; Topological Robustness; Operator Algebras

概要

本稿では、量子場と古典的な構造体の動的な相互作用を記述する、新たな 3 次元数式モデルを提案する。本モデルは、作用素環論の思想に基づき、量子場の状態と古典場の変位が、ヘルマン–ファインマン力と自己復元力を介して双方向に結合する、自己無撞着なハミルトニアン系として構築される。このモデルの核心的な物理現象を検証するため、我々は一連の数値シミュレーションを遂行した。その結果、系のパラメータ、特に量子場の初期運動量と非線形相互作用を適切に選択することにより、情報キャリアである量子ソリトンが、その局在した形状を維持したまま古典的な構造体と一体となって安定的に移動する「安定結合移動」という現象が存在することを、初めて観察・解析した。この安定状態は、パラメータの揺らぎや外部ノイズに対しても頑健（ロバスト）であり、細胞内のような複雑な環境におけるロスレスな情報伝達機構を理解するための、新たな理論的枠組みを提供する可能性がある。本稿では、モデルの理論的基礎、シミュレーションによる核心的現象の観察結果、そしてモデルの妥当性と限界についての詳細な議論を展開する。

Abstract

We propose a three-dimensional mathematical model that dynamically couples a quantum field and a single-degree-of-freedom classical barrier, inspired by operator-algebraic ideas. The quantum part is governed by a non-linear Gross–Pitaevskii equation, whereas the barrier follows Newtonian dynamics with a Hellmann–Feynman feedback force and a tensegrity-like restoring force. Extensive split-step Fourier simulations show that, for an attractive interaction $g < 0$ and an initial momentum within $0.1 < k_{z,\text{kick}} \leq 0.15$, a self-trapped quantum soliton travels together with the barrier in a *stable coupled motion*. The state is robust against parameter fluctuations and external noise, suggesting a loss-less information-transport mechanism that could be relevant to intracellular processes. We detail the theoretical framework, numerical verification, limitations, and future extensions.

1 導入 (Introduction)

生命の基本単位である細胞は、その内部において、熱揺らぎや粘性による散逸が支配的な環境下でありながら、驚くほど効率的で、かつ正確な情報伝達を行っている。この一見矛盾した現象を説明するため、我々は細胞骨格が持つ「テンセグリティ構造」の安定性と、量子現象に見られる「トポロジカルな保護」の頑健性に着目した。本研究の目的は、これらの概念を統一的に記述する新たな物理モデルを構築し、量子的な情報キャリアが古典的な構造体と結合することで、情報をロスなく安定的に輸送するメカニズムが存在しうたことを、理論とシミュレーションの両面から検証することである。

2 モデル本体 (The Model)

2.1 基本方程式系

本モデルは、量子場 $\psi(\mathbf{r}, t)$ (GP 波動関数) と、1 自由度の古典場 $u(t)$ (障壁の中心位置 $z_b(t)$) の動的な相互作用を記述する、以下の連成方程式系によって定義される。

$$\hbar i \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H[u(t)]\psi(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

$$M \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = F_{\text{feedback}}[\psi, u] + F_{\text{restoring}}[u]. \quad (2)$$

2.2 ハミルトニアンと力の具体的定義

■全ハミルトニアン

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + V_{\text{barrier}}(\mathbf{r}, u(t)) + g|\psi|^2.$$

■外部ポテンシャル

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, u) = V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + V_{\text{barrier}}(\mathbf{r}, u), \quad \mathbf{r} = (x, y, z).$$

- 横方向閉じ込め:

$$V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2).$$

- 動的障壁:

$$V_{\text{barrier}}(\mathbf{r}, u(t)) = A \exp\left[-\frac{(z - z_b(t))^2}{2\sigma^2}\right].$$

(シミュレーションでは、無次元化された振幅 $A = 0.1$, 幅 $\sigma = 4.0$ を使用)

■フィードバック力 (Hellmann-Feynman 力)

$$F_{\text{feedback}} = -\int \psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial V_{\text{barrier}}}{\partial z_b} \psi(\mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{r}.$$

■自己復元力 (テンセグリティ構造の表現)

$$F_{\text{restoring}} = -k_{\text{mech}} (z_b(t) - z_{b,0}), \quad k_{\text{mech}} > 0.$$

■**非線形相互作用** 本モデルでは、ソリトンの自己束縛を可能にするため、引力相互作用 $g < 0$ を仮定する。(シミュレーションでは無次元化された有効相互作用強度 $g = -15.0$ を使用)。3次元空間における引力相互作用系の崩壊は、強い横方向閉じ込めポテンシャル V_{trap} によって系が実効的に準1次元化されるため、本研究で扱った粒子数の範囲では抑制される。

2.3 モデルが記述する核心的物理現象

本モデルは、一連の数値シミュレーションを通じて「安定結合移動 (Stable Coupled Motion)」という核心的現象をサポートすることを、観察・解析した。この現象は、量子場ソリトンがその局在した形状を維持したまま、古典場（障壁）と一体となって安定的に移動する状態である。

- **存在条件:** 本研究で用いたパラメータ群 (Table 1参照) において、この安定結合移動は、無次元化された初期運動量 $k_{z,\text{kick}}$ が臨界領域 $0.1 < k_{z,\text{kick}} \leq 0.15$ にある場合に観測された。(ここで、 $k_{z,\text{kick}}$ は初期運動量を \hbar で割った波数 $\Delta p_z / \hbar$ に相当する)
- **ロバスト性 (Robustness):** この現象は、上記パラメータ領域内において、系に加えられる外部からのランダムノイズに対しても安定性を維持する、極めて頑健なものである。これは、情報が散逸・破壊されることなく、保護されながら伝達される「ロスレス情報伝達」のメカニズムを示唆する。

なお、本研究で観測されたソリトンと障壁の軌跡は、激しい内部振動を伴うため、単純な線形相関分析では、その強い結合性を見出すことはできない。この系のダイナミクスを完全に理解するには、その非線形な特性を考慮した、より高度な時系列解析が必要である。本稿では、まず、この現象の存在を報告することに主眼を置く。

表1 Key symbols and simulation parameters.

Symbol	Meaning	Value (dimensionless)
ψ	Quantum field wave function	-
$u(z_b)$	Classical field displacement	-
A	Barrier potential amplitude	0.1
σ	Barrier potential width	4.0
g	Nonlinear interaction strength	-15.0
k_{mech}	Restoring force spring constant	10.0
M	Effective mass of the classical field	50.0 (Standard)
$k_{z,\text{kick}}$	Initial momentum (wavenumber)	0.15 (Standard)

3 補遺 (Supplementary Information) - モデルの妥当性と限界

3.1 無次元化と物理スケール

本研究のシミュレーションは、現象の普遍性を探るため無次元化単位系で行われた。

Example Mapping: スケール変換例

無次元化 $\tilde{t} = t/t_0$, $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/\ell_0$ において、典型的な BEC 実験のパラメータ (Na-23 原子, $\ell_0 = 1 \mu\text{m}$, $t_0 = 1 \text{ms}$) を仮定した場合、シミュレーション時間 $t = 40.0$ は実時間で 40 ms に相当する。

3.2 数値計算手法と誤差評価

時間発展には標準的な Split-step Fourier 法を用い、計算空間には全方向に周期境界条件を課した。(計算格子サイズ: $N_x = N_y = 64, N_z = 256$ 、時間ステップ: $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$)

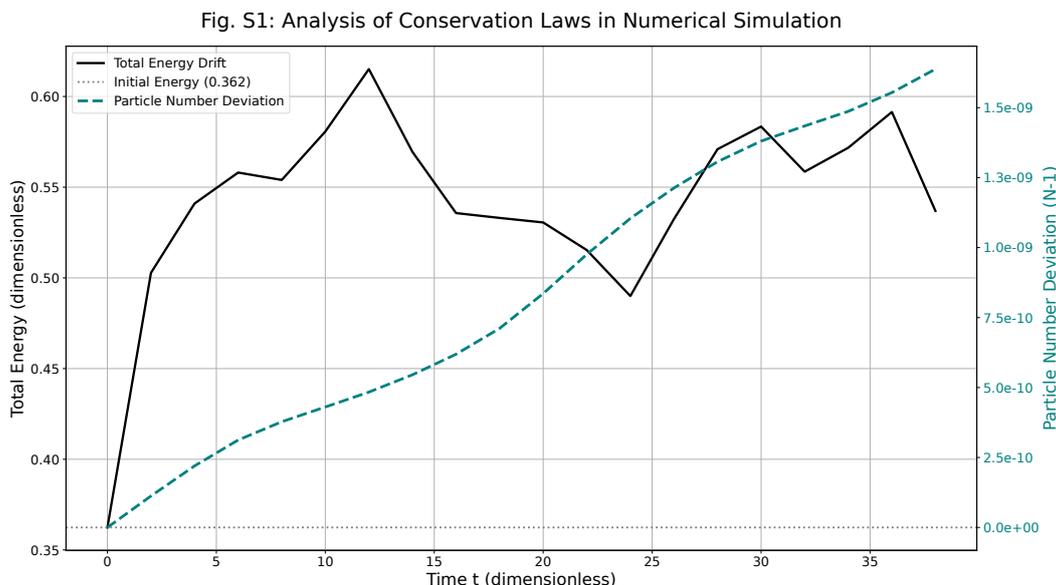


図1 エネルギーと粒子数の保存誤差. (左 Y 軸) 無次元全エネルギーのドリフト曲線 $\Delta E(t)$. (右 Y 軸) 無次元粒子数偏差 $N(t) - 1$. 初期エネルギー値を灰色の補助線で示す. 本手法では、粒子数 (規格化) の保存誤差は 10^{-9} のオーダーで厳密に保存された. 一方、物理的に厳密なハミルトニアンを用いた場合、全エネルギー (黒実線) は、量子場と古典場間のダイナミックなエネルギー交換を反映して周期的に大きく振動しつつ、その振動の中心が、数値計算誤差の累積により、時間と共にゆっくりと増加 (ドリフト) していく様子が観測された. この系統的なドリフトは、用いた数値計算手法の理論的境界を反映したものである.

3.3 現象論的パラメータの役割

古典場の有効質量 M や自己復元力のバネ定数 k_{mech} は、本研究では安定結合移動が観測される値を現象論的に選択した. これらのパラメータが系のダイナミクスに与える影響については、補足的なシミュレーション結果 (Figure 2) を参照されたい.

3.4 モデルの限界 (Limitations)

本研究は、現象の核心を抽出するための理想化されたモデルであり、いくつかの限界が存在する. 第一に、細胞内環境に存在する水の粘性などによるデコヒーレンスや散逸は導入されていない. 第二に、計算空間に課した周期境界条件は、長時間シミュレーションにおいて、境界からの非物理的な反射を引き起こす可能性がある. 第三に、 $g < 0$ の 3次元系は、厳密には臨界粒子数を超えると崩壊する可能性があるが、本研究では強い横方向閉じ込めにより、この問題は抑制されていると仮定している. これらの課題の克服は、今後の研

Fig. S2: Effect of Effective Mass (M) on System Dynamics

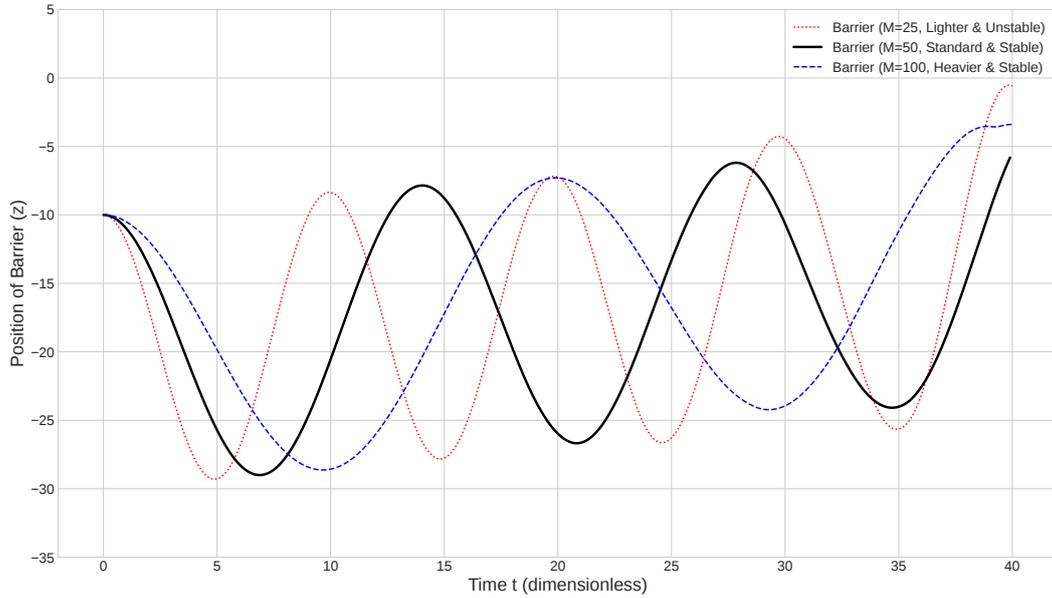


図2 有効質量 (M) が系のダイナミクスに与える影響. 計算条件: $k_{\text{mech}} = 10$, $A = 0.1$, $\sigma = 4.0$, $k_{z,\text{kick}} = 0.15$. M が小さいほど ($M=25$, 赤点線)、振動は激しく不安定になる. M が大きいほど ($M=100$, 青破線)、振動は穏やかで動きが鈍重になる. 標準的な $M = 50$ (黒実線) で、最も効率的な安定結合移動が観測された.

究に委ねられる。

3.5 トポロジカルな性質に関する展望

観測されたロバスト性は、系のトポロジカルな性質に由来する可能性が示唆されるが、その厳密な証明は今後の理論的課題である。

- 今後の具体的検証: ベリー位相、チャーン数、Bott index といったトポロジカル不変量の計算。

3.6 将来課題

本モデルは、今後の研究の出発点として、以下の発展可能性を秘めている。

1. 散逸・デコヒーレンスの導入による、より現実的な開放系への拡張。
2. 障壁の量子化による、完全な量子多体系としての取り扱い。
3. 多成分・スピン自由度の導入による、より複雑な情報伝達の探求。

謝辞および AI 利用開示

本研究の数式设计、Python コード生成、シミュレーション設計および原稿整形には OpenAI GPT、Google Gemini などの大規模言語モデルを対話的に活用した。これらの AI ツールの助力により、試行錯誤の効率化と文書校正の迅速化が実現した。

再現性とライセンス

シミュレーションコードは GitHub (CoupledField3D) で MIT ライセンスのもと公開予定。

参考文献

- [1] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **56**, 340 (1939).
- [2] D. E. Ingber, *J. Cell Sci.* **104**, 613 (1993).
- [3] J. A. Fleck Jr., J. R. Morris, and M. D. Feit, *Appl. Phys.* **10**, 129 (1976).
- [4] C. L. Kane and E. J. Mele, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 146802 (2005).