

# Equivalenza tra la Congettura di Simmetria Prime-Centrata e la Congettura di Goldbach

## *Equivalence between the Prime-Centered Symmetry Conjecture and the Goldbach Conjecture*

Giuseppe Fierro

31 maggio 2025

### Abstract

In questo articolo si dimostra l'equivalenza logica tra una congettura, per quanto ci risulta inedita, che afferma l'esistenza di almeno due numeri primi simmetrici rispetto a ogni intero  $n \geq 2$ , e la celebre congettura di Goldbach. La congettura simmetrica sostiene che per ogni intero  $n \geq 2$  esiste almeno un intero  $k \in [0, n-2]$  tale che  $n-k$  e  $n+k$  siano entrambi primi. Riformulando la congettura di Goldbach nella forma “per ogni  $n \geq 2$ , esistono primi  $p, q$  tali che  $p+q=2n$ ”, mostriamo che le due congetture sono equivalenti.

### Abstract

This article proves the logical equivalence between a conjecture which, as far as we know, has not been previously published, which asserts the existence of at least two primes symmetric about every integer  $n \geq 2$ , and the famous Goldbach Conjecture. The symmetric conjecture states that for every integer  $n \geq 2$ , there exists at least an integer  $k \in [0, n-2]$  such that both  $n-k$  and  $n+k$  are prime. Reformulating Goldbach's conjecture in the form “for every  $n \geq 2$ , there exist primes  $p, q$  such that  $p+q=2n$ ”, we show that the two conjectures are equivalent.

## Introduzione / Introduction

La congettura di Goldbach, proposta per la prima volta nel 1742, rimane uno dei più noti problemi aperti della matematica. La sua versione classica afferma che ogni numero pari maggiore di 2 può essere scritto come somma di due numeri primi. In questo lavoro si propone una forma alternativa, centrata sulla simmetria rispetto a un numero intero, che si rivela equivalente alla formulazione classica. Tale congettura, che chiameremo “congettura di simmetria prime-centrata”, offre una prospettiva nuova e potenzialmente utile per analizzare la classica congettura di Goldbach e potrebbe suggerire nuovi modi per tentare di dimostrarla.

Goldbach's conjecture, first proposed in 1742, remains one of the most famous unsolved problems in mathematics. Its classical version states that every even number greater than 2 can be written as the sum of two prime numbers. This work introduces an alternative, symmetry-based formulation centered around an integer, which turns out to be logically equivalent to the classical one. We call this the “prime-centered symmetry conjecture”, and it offers a new and potentially useful perspective for analyzing the classical Goldbach conjecture and could suggest new ways to attempt to prove it.

## Teorema / Theorem

Le seguenti due affermazioni sono logicamente equivalenti per ogni intero  $n \geq 2$ :

1. **(Goldbach riformulata / Reformuled Goldbach)** Esistono primi  $p, q$  tali che  $p + q = 2n$ .
2. **(Congettura di simmetria prime-centrata / Prime-centered symmetry conjecture)** Esiste  $k \in [0, n - 2]$  tale che  $n - k$  e  $n + k$  siano entrambi numeri primi.

**Dimostrazione / Proof:**

( $1 \Rightarrow 2$ ): Se  $p + q = 2n$ , poniamo  $k = \frac{q-p}{2}$ . Allora:

$$n - k = \frac{p+q}{2} - \frac{q-p}{2} = p, \quad n + k = q$$

e dunque  $n - k$  e  $n + k$  sono primi.

( $2 \Rightarrow 1$ ): Se  $n - k = p$ ,  $n + k = q$  con entrambi primi, allora:

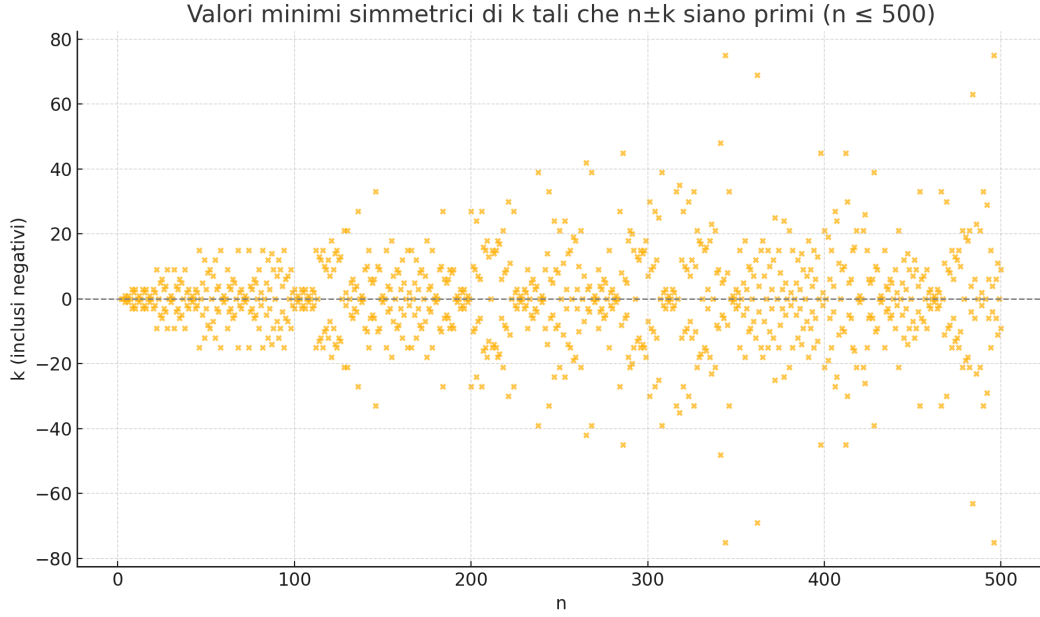
$$p + q = (n - k) + (n + k) = 2n$$

## Esempi Numerici / Numerical Examples

- $n = 5$ :  $k = 2 \Rightarrow 5 - 2 = 3, 5 + 2 = 7$
- $n = 9$ :  $k = 2 \Rightarrow 7, 11$
- $n = 15$ :  $k = 2 \Rightarrow 13, 17$
- $n = 20$ :  $k = 3 \Rightarrow 17, 23$

## Visualizzazione / Visualization

La seguente figura mostra la dispersione dei valori di  $k$  tali che  $n - k$  e  $n + k$  siano entrambi primi, per  $n \leq 500$ :



This visualization highlights the symmetry and structure of valid  $k$  values, offering interesting cues for further statistical and theoretical analysis.

## Conclusione / Conclusion

La congettura di simmetria prime-centrata e la congettura di Goldbach riformulata sono logicamente equivalenti su tutto l'insieme  $\mathbb{N}_{\geq 2}$ .

The prime-centered symmetry conjecture and the reformulated Goldbach conjecture are logically equivalent on the entire domain  $\mathbb{N}_{\geq 2}$ .

## Sviluppi futuri / Future Developments

Questa riformulazione simmetrica apre la strada a ulteriori ricerche sia teoriche che computazionali. In particolare, si potrebbero investigare:

- La distribuzione statistica del minimo valore di  $k$  per ciascun  $n$ , e la sua dipendenza da proprietà aritmetiche di  $n$ , come la funzione  $\Omega(n)$ .
- La possibilità di classificare tutti gli interi  $n \geq 2$  secondo il minimo  $k$  che li collega a due primi simmetrici.
- La costruzione di sequenze definite dal valore minimo di  $k$ , con eventuali proprietà aritmetiche condivise.
- Lo studio della densità e distribuzione dei valori di  $k$  in funzione di  $n$ , con potenziali modelli predittivi (ad esempio logaritmici o poissoniani).

- L'esplorazione della connessione tra queste sequenze e altre congetture famose (es. congettura dei primi gemelli, distribuzione dei numeri primi, ecc.).

This symmetric reformulation paves the way for further theoretical and computational research. In particular, the following directions could be explored:

- The statistical distribution of the minimum  $k$  for each  $n$ , and its dependence on arithmetic properties of  $n$ , such as the function  $\Omega(n)$ .
- The possibility to classify all integers  $n \geq 2$  according to the minimal  $k$  linking them to two symmetric primes.
- The construction of sequences defined by minimal  $k$ , possibly exhibiting shared arithmetic properties.
- The study of the density and distribution of  $k$  values as a function of  $n$ , with potential predictive models (e.g., logarithmic or Poisson-based).
- The exploration of connections between these sequences and other famous conjectures (e.g., twin prime conjecture, prime distribution, etc.).