等差数列の一般項を用いた階差数列の一般項と和の公式の導出および高次階差数列への一般化に関する研究

坂本　久典

2025 年 5 月 16 日

概要

本研究では、等差数列の一般項を応用して階差数列の一般項を導出する新しい方法を提案する。従来の方法では、シグマ記号や高度な数学的知識を必要としていたが、本研究で提案する手法は、第 1 階差と第 2 階差を等差数列として捉え、項数の関係性に着目することで、等差数列より複雑な階差数列の一般項をより簡潔かつ直観的に導出することを可能にする。さらに、得られた一般項から新しい和の公式を導出し、その係数に現れる階乗分の 1 という規則性を見出した。これらの結果を分析することで、より高次の階差数列への一般化を行い、k 次階差数列の一般項を分母の階乗と分子の連続する因子の積という美しい形で表現することに成功した。この手法により、基礎的な数列の知識のみから階差数列の理解を深め、より一般的な理論へと発展させることが可能となった。

1 序論

数学の学習において、基礎的な内容から発展的な内容への橋渡しとなる考え方を見出すことは重要である。特に、数列の学習においては、等差数列や等比数列といった基本的な数列から、より複雑な数列へと学習を進める過程で、学習者が理解しやすい導出方法を提供することが求められる。

本研究では、まず階差数列の一般項を導出する新しい方法として、等差数列の基本的な性質のみを用いたアプローチを提案する。この方法の特徴は、シグマ記号などの高度な数学的記号を用いることなく、第 1 階差と第 2 階差の関係性に着目し、直観的な理解が可能な形で一般項を導出できる点にある。

さらに、得られた一般項を用いて和の公式を導出し、その過程で係数に階乗分の 1 という美しい規則性を発見した。これらの結果を詳しく分析することで、高次の階差数列への一般化を試み、k 次階差数列の一般項が分母に階乗、分子に連続する因子の積という形で表現できることを見出した。これらの発見は、単なる計算技法の改善を超えて、階差数列の持つ数学的構造のより深い理解へとつながるものである。

2 基本的な定義と性質

定義 1 (等差数列)**.** 数列 $\{a_n\}$ において、隣り合う項の差が一定値 d となるとき、この数列を等差数列という。このとき、初項を a とすると、等差数列の一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

で表される。ここで、d を公差という。

定義 2 (階差数列)**.** 数列 $\{a_n\}$ に対して、第 1 階差数列は隣り合う項の差

$$d_1(n) = a_{n+1} - a_n$$

で定義される。同様に、第 1 階差数列の階差数列を第 2 階差数列といい、

$$d_2(n) = d_1(n+1) - d_1(n)$$

で表される。

定義 3 (階差数列). 以下の 2 つの条件は同値であり、これらを満たす数列を階差数列という。

1. 数列の一般項が an^2+bn+c（a、b、c は定数、$a \neq 0$）の形で表される。
2. 数列の第 2 階差 d_2 が一定値となる。

3　研究方法

本研究では、階差数列の一般項を以下の手順で導出する。

1. 第 1 階差 d_1 と第 2 階差 d_2 を等差数列として捉える。
2. 数列の項数と第 2 階差の関係性を利用する。
3. 等差数列の基本的な性質を応用する。

4　一般化と主定理

4.1　一般項の導出

第 1 階差数列を用いて、数列 $\{a_n\}$ の各項を表現する。まず、具体例として以下の数列を考える

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 \\
a_2 &= a_1 + d_1(1) = 2 + 2 = 4 \\
a_3 &= a_2 + d_1(2) = 4 + 4 = 8 \\
a_4 &= a_3 + d_1(3) = 8 + 6 = 14 \\
a_5 &= a_4 + d_1(4) = 14 + 8 = 22
\end{aligned}$$

ここで、第 1 階差数列 $\{d_1(n)\}$ は

$$2, 4, 6, 8, \ldots$$

となり、等差数列を成していることがわかる。また、第 2 階差数列は

$$2, 2, 2, \ldots$$

となり、一定値をとることから、この数列が階差数列であることが確認できる。

この性質を利用して、n 番目の項を表現すると

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + d_1(1) + d_1(2) + \cdots + d_1(n-1) \\
&= 2 + (2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n-1)) \\
&= 2 + 2(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1))
\end{aligned}$$

ここで、等差数列の和の公式を用いると

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

これを代入して

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} \\ &= 2 + (n-1)n \\ &= n^2 - n + 2 \end{aligned}$$

この具体例の考察から、一般の階差数列においても同様の手順で一般項を導出できることが考えられる。

定理 1 (主定理)**.** 初項が a、第 *1* 階差の初項が d_1、第 *2* 階差が一定値 d_2 である階差数列の一般項は、

$$a_n = a + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)d_2}{2}$$

で与えられる。

5 証明

証明 初項が a、第 1 階差の初項が d_1、第 2 階差が一定値 d_2 である階差数列の一般項を導出する。

1. まず、数列 a_n を一般化する。

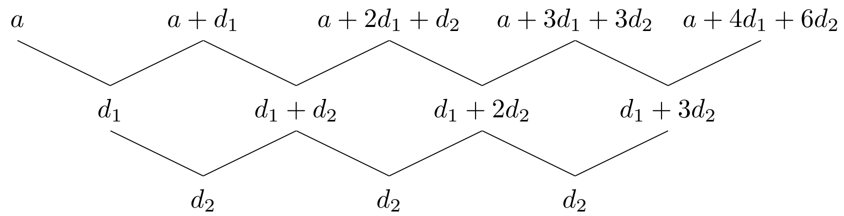

図 1 階差数列 $\{a_n\}$ と階差の関係性

2. 初項 a の値は増えないので変わらず a である。
3. 次に、d_1 の値は 0、d_1、$2d_1$、$3d_1$、$4d_1$、$\ldots$ と増えるので、$(n-1)d_1$ と表せる。
4. 最後に d_2 の値を求める。

d_2 の係数は 0、0、1、3、6、$\ldots$ と増えていることが観察でき、
増加を表すと以下のようになる。

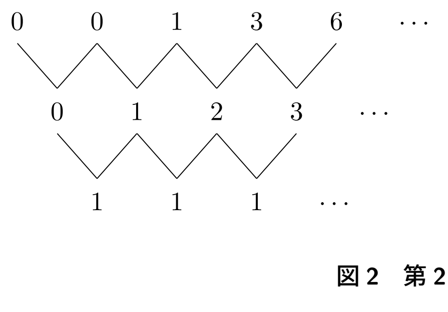

図 2 第 2 階差 d_2 の係数の増加の規則性

4.1. 第 1 階差数列の一般項を求める。第 1 階差数列は等差数列とみることができるので、$a+(n-1)d$ を使う。

ただし、第 2 階差の項数は階差数列の項数に比べて 2 少ないので、$a+(n-2)d$ となる。

これを利用し求めると、

$$\begin{aligned} a+(n-2)d &= 0+(n-2)1 \\ &= 0+n-2 \\ &= n-2 \end{aligned}$$

よって、第 1 階差数列は n-2 となる。

4.2. 4.1 で求めた式は階差数列の等差といえるので、$a+(n-1)d$ に代入すると、

$$\begin{aligned} a+(n-1)d &= 0+(n-1)(n-2) \\ &= 0+n^2-3n+2 \\ &= n^2-3n+2 \end{aligned}$$

となる。

4.2.2. この式に n=1、2、3、. . . を代入すると 0、0、2、6、12、. . . となり、求めたい 0、0、1、3、6、. . . の 2 倍になる。したがって、全体を 2 で割ると、

$$(n^2-3n+2) \div 2 = \frac{n^2-3n+2}{2}$$

となる。

4.3. 4.2.2 で求めた式は d_2 の係数なので、d_2 で括ると、

$$\begin{aligned} (\frac{n^2-3n+2}{2})d_2 &= \frac{(n^2-3n+2)d_2}{2} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)d_2}{2} \end{aligned}$$

となる。

5. 最後に、2、3、4.3 で求めた式を足し合わせると、

$$a+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)d_2}{2}$$

となり、これで階差数列の一般項を求めることができた。この定理は、階差数列の一般項が初項、第 1 階差の初項、および第 2 階差という 3 つの値によって一意に定まることを示している。特に、n^2 の係数が第 2 階差 d_2 と関係していることは、数列の 2 次性を特徴づけている。

6. この式が求める一般項であることを以下の 3 点で確認する。

(i) $n=1$ のとき

$$a+(1-1)d_1+\frac{(1-1)(1-2))d_2}{2}$$
$$= a+0+0$$
$$= a$$

(ii) 第 1 階差を確認する。$(n+1)$ 項と n 項の差を取ると、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n = [a + nd_1 + \frac{n(n-1)d_2}{2}] - \\ [a + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)d_2}{2}] \\ = d_1 + (n-2)d_2 \end{aligned}$$

これは第 1 階差数列を等差数列としたときの一般項の形である。

(iii) 第 2 階差を確認する。まず一般項

$$a_n = a + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)d_2}{2}$$

において、n を $n+1$ に置き換えた項から n の項を引くと、

$$\begin{aligned} &[a + d_1 n + \frac{n(n-1)d_2}{2}] - [a + d_1(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)d_2}{2}] \\ &= d_1 + [\frac{n(n-1)d_2}{2} - \frac{(n-1)(n-2)d_2}{2}] \\ &= d_1 + \frac{(n-1)[n-(n-2)]d_2}{2} \\ &= d_1 + \frac{(n-1)2d_2}{2} \\ &= d_1 + (n-1)d_2 \end{aligned}$$

同様に、$(n+2)$ 項と $(n+1)$ 項の差は、

$$\begin{aligned} &[a + d_1(n+1) + \frac{(n+1)nd_2}{2}] - [a + d_1 n + \frac{n(n-1)d_2}{2}] \\ &= d_1 + [\frac{(n+1)nd_2}{2} - \frac{n(n-1)d_2}{2}] \\ &= d_1 + \frac{n[(n+1)-(n-1)]d_2}{2} \\ &= d_1 + \frac{2d_2 n}{2} \\ &= d_1 + d_2 n \end{aligned}$$

したがって、第 2 階差は、

$$\begin{aligned} [d_1 + d_2 n] - [d_1 + (n-1)d_2] &= d_2 n - (n-1)d_2 \\ &= d_2 \end{aligned}$$

となり、これは一定値 d_2 となるため、階差数列の定義を満たす。

以上により、この式は与えられた条件を満たす階差数列の一般項であることが証明された。

□

6 和の公式の導出

一般項から和の公式を導出することで、本研究で得られた一般項の新しい検証方法を提示する。

階差数列の一般項

$$a_n = a + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)d_2}{2}$$

の和を考える。

定理 2 (和の公式)**.** 階差数列の第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = an + \frac{(n-1)d_1 n}{2} + \frac{(n-1)(n-2)d_2 n}{6}$$

で与えられる。

証明　一般項の和を考える

$$\sum_{k=1}^{n} [a + (k-1)d_1 + \frac{(k-1)(k-2)d_2}{2}]$$

各項に分けて計算する。

1. 定数項：

$$\sum_{k=1}^{n} a = an$$

2. 第 1 階差の項：

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)d_1 = d_1 \sum_{k=1}^{n} (k-1) = d_1 \frac{(n-1)n}{2}$$

3. 第 2 階差の項：

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} [\frac{(k^2-3k)d_2}{2} + d_2] \\ &= \frac{d_2}{2} \sum_{k=1}^{n} (k^2 - 3k) + nd_2 \\ &= \frac{d_2}{2} [\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3 \sum_{k=1}^{n} k] + nd_2 \end{aligned}$$

ここで、平方数の和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

と自然数の和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

を用いると、

$$
\begin{aligned}
&\frac{d_2}{2}[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\frac{n(n+1)}{2}] \\
&= \frac{d_2}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{d_2}{2} \cdot \frac{9n(n+1)}{6} \\
&= \frac{d_2 n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{9d_2 n(n+1)}{12} \\
&= \frac{d_2 n(n+1)(2n+1-9)}{12} \\
&= \frac{d_2 n(n+1)(2n-8)}{12} + nd_2 \\
&= \frac{d_2 n(2n^2-6n-8+12)}{12} \\
&= \frac{d_2 n(2n^2-6n+4)}{12} \\
&= \frac{d_2 n(n-1)(n-2)}{6}
\end{aligned}
$$

全ての項を合わせると、

$$S_n = an + \frac{d_1 n(n-1)}{2} + \frac{d_2 n(n-1)(n-2)}{6}$$

を得る。 □

この和の公式の導出により、本研究で得られた一般項の正当性が別の側面からも確認された。また、この結果は階差数列の和について、視覚的にも理解しやすい形での表現を与えている。特に注目すべき点として、最終的な形式において分母が階乗 (1!, 2!, 3!) として現れることは、この公式の数学的な美しさを示すとともに、より高次の階差数列への一般化の可能性を示唆している。

7　高次の階差数列の一般項

これまで得られた階差数列の一般項の結果を、より高次の階差数列へと拡張することを考える。

7.1　パターンの発見

導出した一般項を整理すると
第 1 階差の項：$\frac{(n-1)}{1!}d_1$
第 2 階差の項：$\frac{(n-1)(n-2)}{2!}d_2$
この二つの項から、以下のような規則性が見られる

1. 分子は $(n-1)(n-2)...$ のように連続して 1 ずつ減る項の積である。階差の次数に応じて因子の数が増えていく
2. 分母は階差の次数の階乗になっている（1!, 2!）
3. k 回階差をとると k 個の項数が減少する

7.2　一般項の導出

このパターンから、k 次の階差数列の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= a + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!} d_k \\ &= a + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} d_k \end{aligned}$$

という形になることが予想される。このことを数学的帰納法によって証明する。

(i) $k = 1$ のとき、等差数列の公式になり成り立つ。

$$\begin{aligned} a_n &= a + \sum_{k=1}^{1} \frac{(n-1)}{1!} d_k \\ &= a + (n-1) d_k \end{aligned}$$

(ii) $k = m$ まで成り立つと仮定すると、

$$a_m = a + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m-1}{k} d_k.$$

(iii) $k = m + 1$ のときも成り立つことを示す。

両辺に m 次の階差 d_m を加えると、

$$a_{m+1} = a_m + d_m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k}.$$

ここで、二項定理より

$$\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} = 2^{m-1}.$$

したがって、

$$a_{m+1} = a + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m-1}{k} d_k + \binom{m}{m} d_m.$$

よって、

$$a_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} d_k$$

の形が数学的帰納法によって成り立つことが証明された。

7.3　考察

この一般化により、以下のような重要な知見が得られた

1. 階差の次数と多項式の次数の対応関係- k 回の階差をとると、k 次多項式となる- 各階差での項数減少が係数の形に反映される

3. 組み合わせ論的な解釈- 分母の階乗の出現- 分子の連続する因子の積- これらは組み合わせ論的な意味を持つ

7.4 新たな研究課題

この結果から、以下のような研究課題が導かれる

1. より一般的な数列への拡張- 非整数次数の階差の可能性- 複素数領域への拡張
2. 応用可能性の探究- 漸化式への応用- 数値解析での活用- 組み合わせ論との関連の解明

8 結論

本研究では、階差数列の一般項を導出する新しい方法を提案し、その和の公式を導出するとともに、結果を高次の階差数列へと一般化することに成功した。本研究の主な特徴と成果は以下の通りである。

1. 等差数列の基本的な性質のみを用いることで、階差数列の一般項
$$a_n = a + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)d_2}{2}$$
の導出に成功した。
2. 第 1 階差 d_1 と第 2 階差 d_2 を等差数列として捉え、項数との関係性に着目することで、より直観的な導出過程を実現した。
3. シグマ記号などの高度な数学的記号を使用せず、基礎的な数列の知識のみで理解可能な導出方法を確立した。
4. 導出した一般項から階差数列の和の公式
$$an + \frac{d_1 n(n-1)}{2} + \frac{d_2 n(n-1)(n-2)}{6}$$
を導くことができた。この和の公式において、階差の次数に応じて係数が階乗分の 1（$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$）となる規則性を見出した。
5. この規則性の発見から、高次の階差数列への一般化を行い、k 次階差数列の一般項を
$$a_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!} d_k$$
という形で表現することに成功した。
6. この一般項は分母の階乗と分子の連続する因子の積という美しい形を持ち、階差の次数と係数の関係を明確に示している。
7. 本手法は、高校数学から大学数学への橋渡しとなる教育的価値を有するとともに、離散数学における新しい理論展開の可能性を示唆している。

本研究で提案した手法により、基礎的な数列の知識のみを用いて階差数列の一般項の導出過程を理解することが可能となった。さらに、和の公式の導出を経て高次の階差数列への一般化を行うことで、この理論がより広い数学的文脈の中で重要な意味を持つことが明らかになった。今後の課題としては、非整数次数の階差や複素数領域への拡張、漸化式への応用など、さらなる理論の発展が

考えられる。特に、得られた一般項と和の公式に現れる階乗分の 1 という係数の組み合わせ論的な意味や、より一般的な数列理論との関連についても研究の余地がある。