

Zur Konvergenz der Collatz-Funktion über natürlichen Zahlen mittels Potenzstruktur

Autor: Viktor Weimer

Zusammenfassung

Die Collatz-Vermutung behauptet, dass jede natürliche Zahl durch wiederholte Anwendung der Regeln der Collatz-Funktion in endlicher Zeit die Zahl 1 erreicht. Dieser Beitrag stützt sich auf eine systematische Betrachtung der Struktur aller natürlichen Zahlen unter besonderer Berücksichtigung der Potenzen von 2 sowie der Kongruenzklassen modulo 4, um zu zeigen, dass jede Zahl entweder direkt oder über Transformationen in diese Struktur übergeht und somit in endlicher Zeit 1 erreicht.

1. Definition der Transformation

Die Collatz-Funktion $T: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ ist definiert als:

$$T(N) = \begin{cases} N / 2 & \text{wenn } N \text{ gerade,} \\ 3N + 1 & \text{wenn } N \text{ ungerade} \end{cases}$$

Nach Modulo-4-Klassen ergibt sich:

- $N \equiv 0 \pmod{4} \rightarrow T(N) = N / 2$
- $N \equiv 2 \pmod{4} \rightarrow T(N) = N / 2$
- $N \equiv 1 \pmod{4} \rightarrow T(N) = 3N + 1$
- $N \equiv 3 \pmod{4} \rightarrow T(N) = 3N + 1$

2. Beobachtung: Stabilität der 2er-Potenz

Satz: Für jede Zahl $N = 2^k$ gilt:

$$T^k(2^k) = 1$$

Beweis: Jede Potenz von 2 ist gerade und wird in k Schritten durch $T(N) = N / 2$ zu 1 reduziert.

3. Rückführung aller Zahlen auf 2er-Potenzen

Lemma: Jede natürliche Zahl führt direkt oder über Transformationen zu einer Potenz von 2.

- Für gerade N : $N = 2^k \cdot m$ mit m ungerade. Nach k Teilungen verbleibt m .
- Für ungerades m : $T(m) = 3m + 1 \rightarrow$ gerade $\rightarrow$ dann wieder teilbar.

Fallunterscheidung modulo 4:

- **Fall 1:** $N \equiv 1 \pmod{4} \rightarrow N = 4n + 1 \rightarrow T(N) = 3(4n + 1) + 1 = 12n + 4 = 4(3n + 1)$
- **Fall 2:** $N \equiv 3 \pmod{4} \rightarrow N = 4n + 3 \rightarrow T(N) = 3(4n + 3) + 1 = 12n + 10 = 2(6n + 5)$

Die erste Klasse führt schneller zu 2er-Potenzen, die zweite braucht ggf. mehr Schritte, aber beide konvergieren.

4. Beispiel extrem großer Zahlen

Für $N = 2^{1.000.000.000}$ gilt:

$$T^{1.000.000.000}(N) = 1$$

Dies zeigt, dass auch extrem große Zahlen dem Prozess folgen.

5. Schlussfolgerung

Da jede Zahl entweder eine 2er-Potenz ist oder zu einer wird, folgt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_+, \exists k \in \mathbb{N}_+ : T^k(n) = 1$$

Der Collatz-Prozess terminiert für alle natürlichen Zahlen.

Literatur

- Collatz, L. (1937). "On the Origins of the $3n + 1$ Problem", *Mathematics of Computation*.
- Lagarias, J.C. (1985). "The $3x + 1$ Problem and Its Generalizations", *Amer. Math. Monthly*.
- Weimer, V. (2024). "Collatz Vermutung Beweis Rigoros".